



Univerzitet u Zenici  
Politehnički fakultet  
Odsjek: Građevinarstvo  
Zenica, 07.07.2014.

## Inženjerska matematika III, pismeni ispit

**Važno:** Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3y \\ \dot{y} &= -3x - 2y + 2e^{2t} \end{aligned}$$

2. Odrediti

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10} \right\}.$$

3. Vjerovatnoća da je na slučaj izabrani kupac namještaja muškarac iznosi 0.65, vjerovatnoća da je kupac osoba u braku jednaka je 0.75, a vjerovatnoća da je oženjeni muškarac je 0.70. Ako slučajno biramo jednog kupca, izračunati vjerovatnoću da je odabrano lice:

- (a) ženskog pola;
- (b) udata žena;
- (c) osoba koja nije u braku;
- (d) neudata žena.

4. Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

15, 6; 16, 4; 14, 8; 17, 2; 16, 9; 15, 3; 14, 0; 15, 9

(50%) (a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštirati histograma frekvencija tako da ima 3 intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(50%) (b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Zadaci su skinuti sa stranice [ff.unze.ba/nabokov](http://ff.unze.ba/nabokov).  
Za uočene greške pisati na [infoarrt@gmail.com](mailto:infoarrt@gmail.com)

# Riješiti sistem

$$\dot{x} = -2x - 3y$$

$$\dot{y} = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x = -2x - 3y$$

$$\frac{d}{dt}y = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Ako uvedemo oznaku  $D = \frac{d}{dt}$  imamo

$$(D+2)x + 3y = 0$$

... (I)  $/ (D+2)$

$$3x + (D+2)y = 2e^{2t}$$

... (II)  $/ 3$

Rješimo se  $y$ -na:

$$(D+2)^2 x + 3(D+2)y = 0$$

$$- 3x + 3(D+2)y = 6e^{2t}$$

$$(D^2 + 4D - 5)x = -6e^{2t} \quad \dots (III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po  $x$  sa konstantnim koeficijentima - nezno opšte jednačije možemo odrediti upr. metodom neodređenih koeficijenata.

$$x = x_h + x_p$$

kar. jedr.  $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \quad \rightarrow \quad x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-5t}$$

$$x_p = A e^{2t}$$

$$x_p' = 2A e^{2t}$$

$$x_p'' = 4A e^{2t}$$

$$x_p'' + 4x_p' - 5x_p = (4A + 8A - 5A)e^{2t} = -6e^{2t}$$

$$7A = -6 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{6}{7}$$

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$$

Prva jednačina iz sistema je  $\dot{x} = -2x - 3y$  tj.

$$-3y = \dot{x} + 2x \quad | \cdot (-3)$$

$$y = -\frac{1}{3} \dot{x} - \frac{2}{3} x$$

$$y = -\frac{1}{3} \left( c_1 e^t - 5c_2 e^{-5t} - \frac{12}{7} e^{2t} \right) - \frac{2}{3} c_1 e^t - \frac{2}{3} c_2 e^{-5t} + \frac{4}{7} e^{2t}$$

$$y = -c_1 e^t + c_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t}$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t} \\ y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t} \end{cases}$$

(#) Odrediti  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+2}{s^2+2s+10} \right\}$ .

Rj.

$$s^2+2s+10 = s^2+2 \cdot s \cdot 1 + 1 - 1 + 10 = (s+1)^2 + 3^2$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Iz tablice elementarnih Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \right\} (t) = e^{at} \cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \right\} (t) = e^{at} \sin bt$$

U našem slučaju  $a=-1$ ,  $b=3$ .

Sljedeći korak je da odredimo konstante  $A$  i  $B$  iz izraza

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = A \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \quad | \cdot (s^2+2s+10)$$

$$3s+2 = A(s+1) + 3B$$

$$\Rightarrow s^0: A = 3$$

$$s^1: \underline{A + 3B = 2}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A = 3 \\ B = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+2}{s^2+2s+10} \right\} (t) = 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} \right\} (t) - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \right\} (t)$$

$$= 3e^{-t} \cos 3t - \frac{1}{3} e^{-t} \sin 3t$$

# Vjerovatnoća da je na slučaj; izabrani kupac namještaja muškarac iznosi 0,65; vjerovatnoća da je kupac osoba u braku jednaka je 0,75; a vjerovatnoća da je oženjeni muškarac je 0,70. Ako slučajno biramo jednog kupca, izračunati vjerovatnoću da je odabrano lice:

(a) ženskog pola;

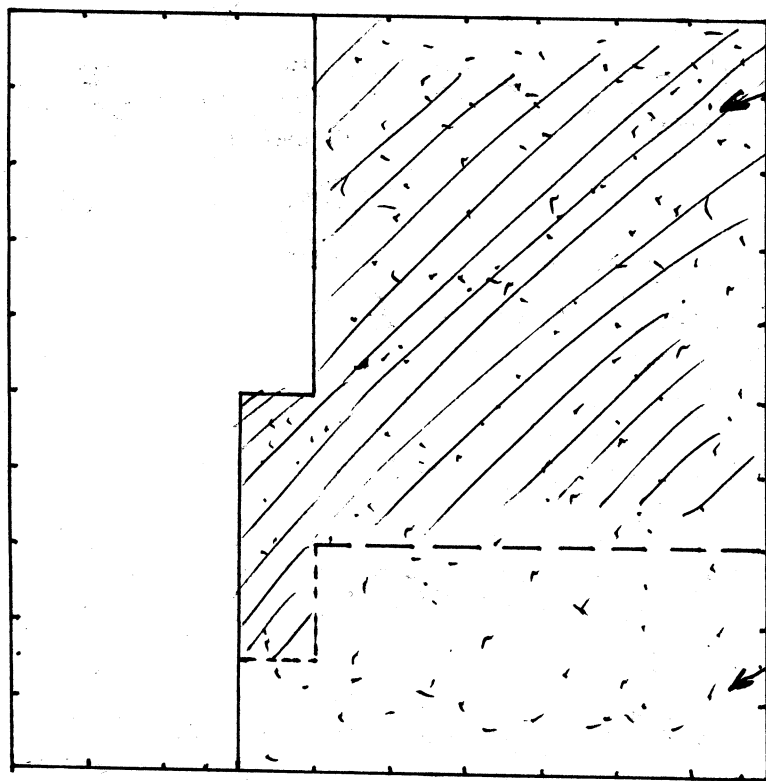
(b) udata žena;

(c) osoba koja nije u braku;

(d) neudata žena.

Rj. I dio - korištenjem geometričke vjerovatnoće

Sve kupce namještaja predstavimo pomoću pravougaonika dimenzija  $10 \times 10$  cm. Tada 65% tog pravougaonika predstavlja muškarce (označimo taj dio pomoću tačkica), a 70% tog istaknutog dijela znamo da su oženjeni muškarci.



70% kupaca namještaja su oženjeni muškarci

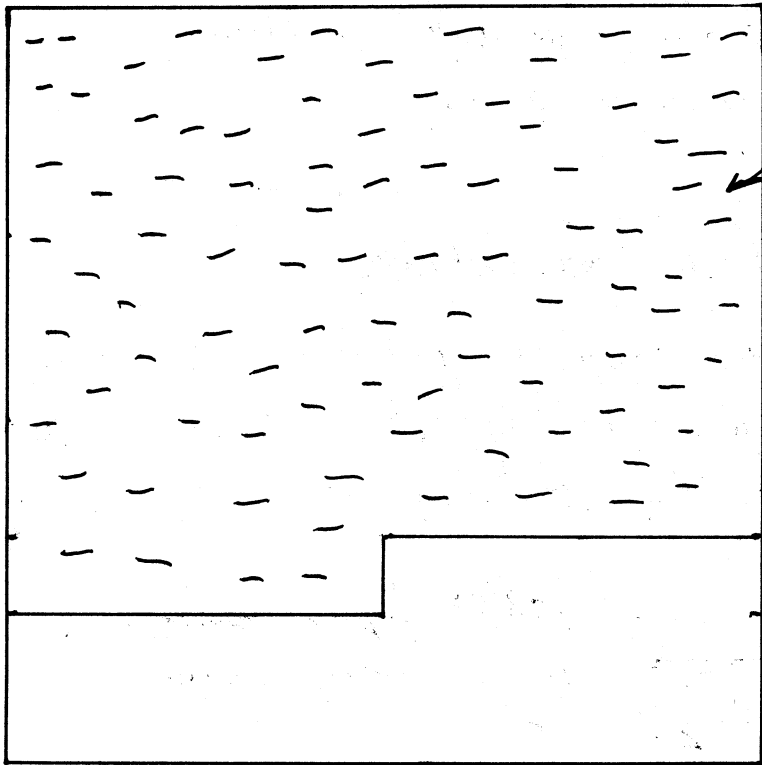
65% kupaca namještaja su muškarci

Označimo sa  $\check{Z}$  događaj da je "na slučaj; izabrani kupac žena", a sa  $M$  događaj da je "na slučaj; izabrani kupac muškarac". Tada

$$P(\check{Z}) = 1 - P(M) = 0,35 \quad \text{ili} \quad P(\check{Z}) = \frac{n(\check{Z})}{n(\text{ukupno})} = \frac{35}{100} = 0,35$$

čime smo riješili dio pod (a), (primjetimo da je  $M \cup \bar{M} = K$ , gdje je  $K$  skup svih kupaca).

Đale označimo sa  $O$  događaj: "na slučaj, odabrani kupac je u braku", a sa  $N$  događaj: "na slučaj, odabrani kupac nije u braku".



vjerovatnoća da je kupac odabran u braku jednaka je 75%

Prema postavci zadatka je

$$P(O) = 0,75$$

$\Downarrow$

$$P(N) = 1 - P(O) = 0,25$$

ili

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(K)} = \frac{25}{100} = 0,25$$

čime smo riješili dio pod (a)

II dio - primenom formule potpune vjerovatnoće

$$P(O) = P(M) \cdot P(O|M) + P(\bar{M}) \cdot P(O|\bar{M}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,75 = 0,65 \cdot 0,70 + 0,35 \cdot P(O|\bar{M})$$

$$\Rightarrow P(O|\bar{M}) = 0,8428$$

vjerovatnoća da je na slučaj, odabrani kupac udata žena 84,28%

$\Rightarrow$  vjerovatnoća da je slučajni kupac udata žena je 15,72%

$$\boxed{\text{Primjetimo da je } P(O) = P(M \cap O) + P(\bar{M} \cap O)}$$

# Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

15,6; 16,4; 14,8; 17,2; 16,9; 15,3; 14,0; 15,9

(a) Nađi standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histogram tako da ima tri intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Rj. (a) Standardnu devijaciju možemo izračunati po formuli

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

Dat je uzorak od 8 vrijednosti:

$$\bar{x} = \frac{15,6 + 16,4 + 14,8 + 17,2 + 16,9 + 15,3 + 14,0 + 15,9}{8} = 15,7625$$

Sredina uzorka je 15,7625.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 15,6^2 + 16,4^2 + 14,8^2 + \dots + 15,9^2 = 1995,71$$



$$s^2 = \frac{1995,71 - 8 \cdot 15,7625^2}{7} = 1,15125$$

Standardna devijacija uzorka je  $s \approx 1,072$ .

Raspon uzorka je  $R = 17,2 - 14 = 3,2$

25ti postotak uzorka je ...

$0,25 \cdot 8 = 2$  cio broj, trećinama prosjek druge i treće <sup>vrijednosti</sup>

Poređajmo brojeve po veličini: 14; 14,8; 15,3; 15,6; 15,9;  
16,4; 16,9; 17,2

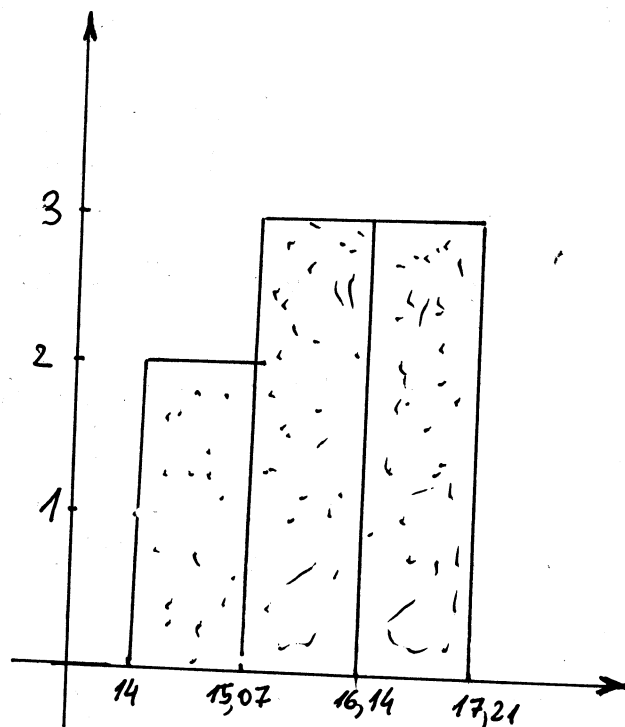
25ti postotak uzorka je 15,05

75ti postotak uzorka je 16,65

Interkvartilni raspon uzorka je 1,06

$3,2 : 3 = 1,0666 \Rightarrow$  uzimamo interval dužine 1,07

Klasa intervala	Frekvencija
[14; 15,07)	2
[15,07; 16,14)	3
[16,14; 17,21)	3



Sredina uzorka je već izračunata

$$\bar{x} = 15,7625$$

Medijana uzorka je 15,75,

Mod uzorka su sve vrijednosti tj. ne postoji podatak sa najvećom frekvencijom.

$$(b) \sigma = 2.$$

$$H_0: \mu = 15$$

$$H_1: \mu \neq 15$$

Prosjeak od 8 datih vrijednosti je  $\bar{X} = 15,7625$ .  
Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{8}}{2} |15,7625 - 15| \approx 1,0783$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 1,0783\} = 2 P\{Z \geq 1,0783\} =$$

$$= 2(1 - P\{Z \leq 1,0783\}) \stackrel{\text{prema tabeli}}{=} 2(1 - 0,8596) = 0,2808$$

$$= 2(1 - 0,8596) = 0,2808$$

$$P\{Z \leq 1,07\} = 0,8577$$

$$P\{Z \leq 1,08\} = 0,8599$$

$$\Rightarrow P\{Z \leq 1,075\} = 0,8588$$

$$\Rightarrow P\{Z \leq 1,0775\} = 0,8594 \Rightarrow P\{Z \leq 1,0787\} = 0,8597$$

Tražena  $p$  vrijednost je  $p = 0,281$ .

Nulta hipoteza neće biti odbacena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,281. Za bilo koji nivo značajnosti <sup>ili jednako</sup> veći od 0,281 nulta hipoteza će biti odbacena.